

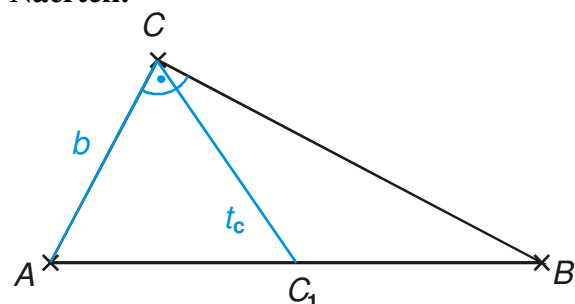
3.4.7 Konstrukce trojúhelníků III (doplňování)

Předpoklady: 3406

Shrnutí dvou předešlých hodin: Dokážeme sestavit trojúhelníky, u kterých známe tři strany, dvě strany a úhel nebo stranu a dva úhly. Pokud zadání neumožňuje tímto způsobem sestavit hledaný trojúhelník, sestavíme „částečný“ trojúhelník a pak jej doplníme na hledaný.

Př. 1: Sestroj všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC ($|\sphericalangle ACB = \gamma = 90^\circ|$), pro které platí:
 $t_c = 3,5 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$.

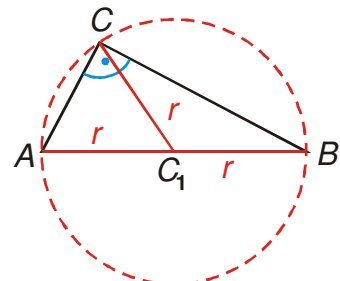
Náčrtek:



Úloha je nepolohová.

Problém: Úhel ACB není úhlem, který by svíraly zadané úsečky b a $t_c \Rightarrow$ hledáme další úhel nebo stranu tak, abychom mohli sestavit trojúhelník.

Řešení:



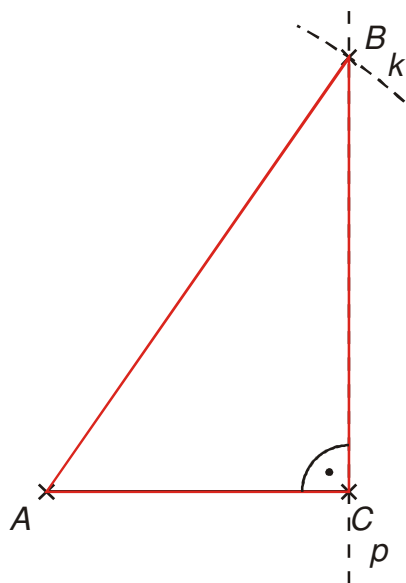
Speciální vlastnost pravoúhlých trojúhelníků: Přepona je zároveň průměrem Thaletovy kružnice, která je zároveň kružnicí opsanou trojúhelníku $\Rightarrow$ platí $|AC_1| = |CC_1| = |BC_1| \Rightarrow c = 2t_c = 7 \text{ cm}$.

$\Rightarrow$ Trojúhelník můžeme snadno sestavit podle zadání $\gamma = 90^\circ, b = 4 \text{ cm}, c = 7 \text{ cm}$.

Konstrukce:

Zápis konstrukce:

1. $AC; |AC| = b = 4 \text{ cm}$
2. $p; p \perp AC, C \in p$
3. $k; k(A; c = 7 \text{ cm})$
4. $B; B = k \cap p$
5. $\triangle ABC$



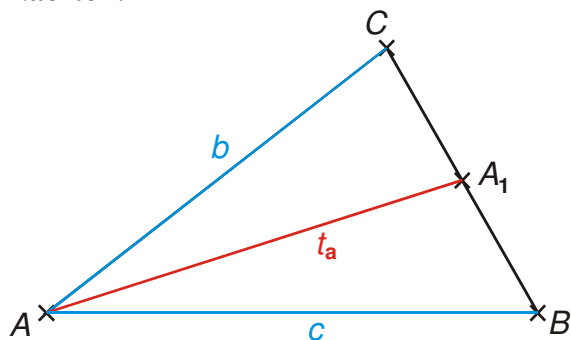
Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k s přímkou p .

Dodatek: Řešení předchozího příkladu není definitivním řešením objeveného problému. Můžeme si představit téměř stejné zadání trojúhelníku bez pravého úhlu, který již nebudeme schopni sestrojit.

Př. 2: Petáková:
strana 77/cvičení 17 d), e), f)

Př. 3: Je dána úsečka AA_1 , $|AA_1| = 4 \text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $b = 5 \text{ cm}$, $c = 4 \text{ cm}$.

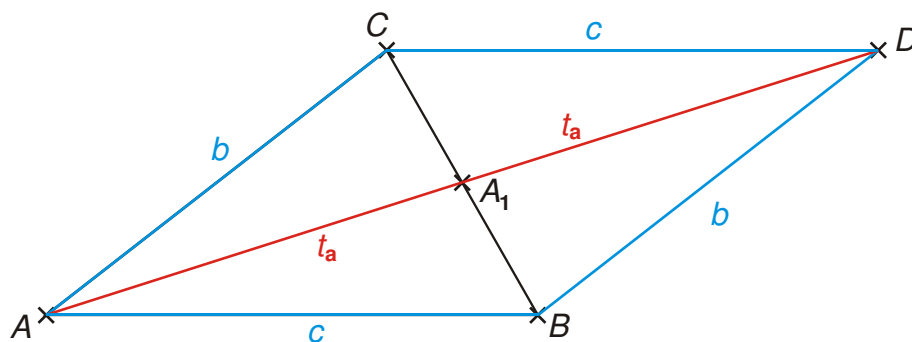
Náčrtek:



Úloha je polohová.

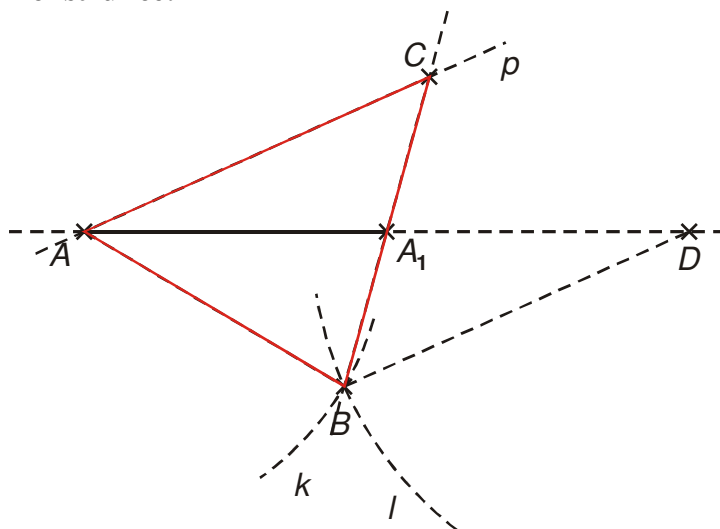
Problém: Známe tři délky, všechny však vycházejí z jednoho bodu $\Rightarrow$ nemůžeme sestavit ani výsledný ani žádný „částečný“ trojúhelník.

Řešení: Snažíme se upravit obrázek tak, aby se objevil trojúhelník, u kterého známe tři strany (úhel asi nezískáme) $\Rightarrow$ doplníme obrázek na rovnoběžník $ABDC$.



Můžeme sestrojit trojúhelník ABD (nebo trojúhelník ADC), u kterého známe všechny tři strany. Bod C najdeme jako průsečík přímky BA_1 rovnoběžky se stranou BD bodem A .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

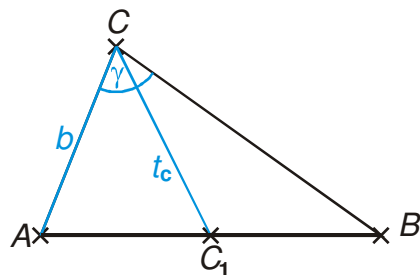
1. $AA_1; |AA_1| = t_a = 4 \text{ cm}$
2. $\leftrightarrow AA_1; D; D \in \leftrightarrow AA_1, |A_1D| = |AA_1|$
3. $k; k(A; c = 4 \text{ cm})$
4. $l; l(D; b = 5 \text{ cm})$
5. $B; B = k \cap l$
6. $\leftrightarrow BA_1$
7. $p; p \parallel BD, A \in p$
8. $C; C = p \cap \leftrightarrow BA_1$
9. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula nebo jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnic k a l .

Př. 4: Sestroj všechny trojúhelníky ABC , pro které platí: $\gamma = 65^\circ$, $t_c = 3,5 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$.

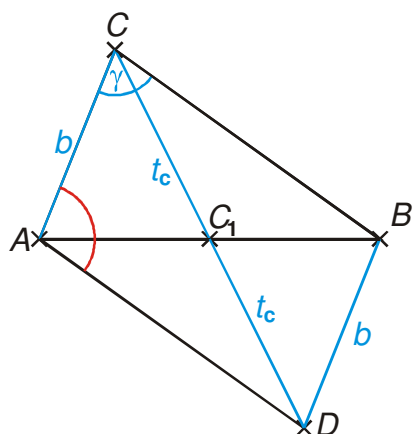
Stalo se to, čeho jsme se báli. Úvodní příklad je zpět, tentokrát bez speciální velikosti úhlu γ .

Náčrtek:



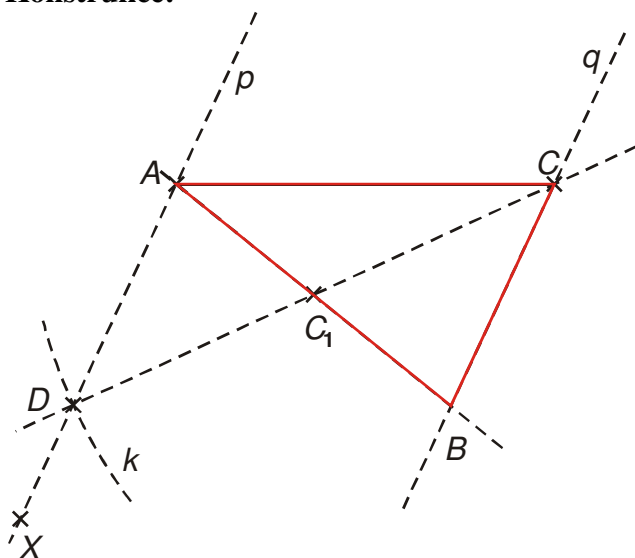
Úloha je nepolohová.

Problém: Úhel γ není úhlem, který by svíraly zadané úsečky b a $t_c \Rightarrow$ zkusíme dokreslit obrázek (inspirace minulým příkladem) tak, aby vznikl sestrojitelný trojúhelník.



Řešení: Nakreslený rovnoběžník neřeší příklad, dokud si neuvědomíme, že červeně vyznačený úhel u vrcholu A má velikost $180^\circ - \gamma \Rightarrow$ sestrojíme trojúhelník ADC a bod B najdeme jako průsečík přímky AC_1 s rovnoběžkou se stranou AD bodem C .

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

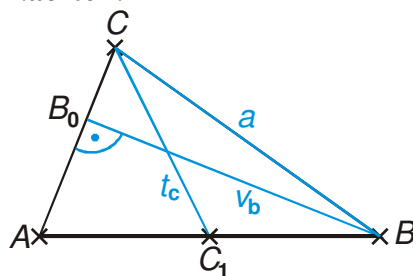
1. $AC; |AC| = b = 5 \text{ cm}$
2. $p; A \in p, X \in p, |\sphericalangle CAX| = 115^\circ$
3. $k; k(C; 2t_c = 7 \text{ cm})$
4. $D; D = k \cap p$
5. $C_1; C_1 \in CD, |C_1D| = |C_1C|$
6. $\leftrightarrow AC_1$
7. $q; q \parallel AD, C \in q$
8. $B; B = q \cap \leftrightarrow AC_1$
9. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k s přímkou p .

Pedagogická poznámka: Pokud dojde na rýsování, začněte tak, jak je uvedeno v učebnici - s vodorovnou úsečkou AC . Rýsovaný obrázek je tak otočený oproti náčrtku. Rýsování pak vyžaduje lepší představivost.

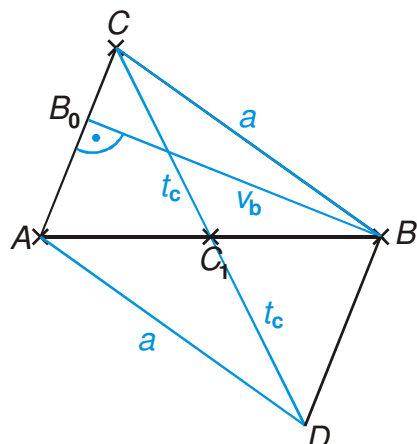
Př. 5: Sestroj všechny trojúhelníky ABC , pro které platí: $a = 5 \text{ cm}$, $t_c = 4,5 \text{ cm}$, $v_b = 4 \text{ cm}$.

Náčrtek:



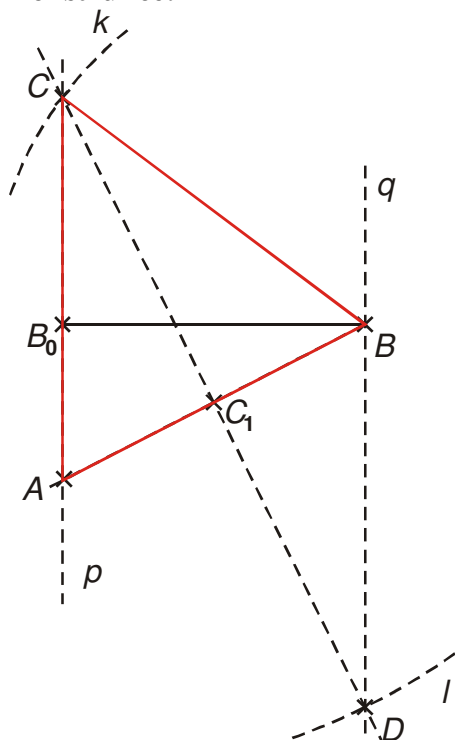
Úloha je nepolohová.

Problém: Můžeme sestrojit pouze trojúhelník $BB_0C \Rightarrow$ zkusíme dokreslit obrázek (inspirace minulými příklady) tak, abychom využili znalost těžnice t_c .



Řešení: Nakreslený rovnoběžník narýsujeme, když si uvědomíme, že přímka BD je rovnoběžná s přímkou CB_0 a po nakreslení trojúhelníku BB_0C budeme znát její směr $\Rightarrow$ sestrojíme trojúhelník CBD a bod A najdeme jako průsečík přímky BC_1 s přímkou CB_0 .

Konstrukce:



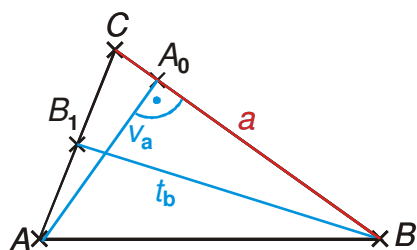
Zápis konstrukce:

1. $BB_0; |BB_0| = v_b = 4 \text{ cm}$
2. $p; B_0 \in p, p \perp BB_0$
3. $k; k(B; a = 5 \text{ cm})$
4. $C; C = k \cap p$
5. $l; l(C; 2t_c = 9 \text{ cm})$
6. $q; B \in q, p \parallel q$
7. $D; D = l \cap q$
8. $C_1; C_1 \in CD, |C_1D| = |C_1C|$
9. $\leftrightarrow BC_1$
10. $A; A = p \cap \leftrightarrow BC_1$
11. $\triangle ABC$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině 0 až jedno řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k s přímkou p a kružnice l s přímkou q .

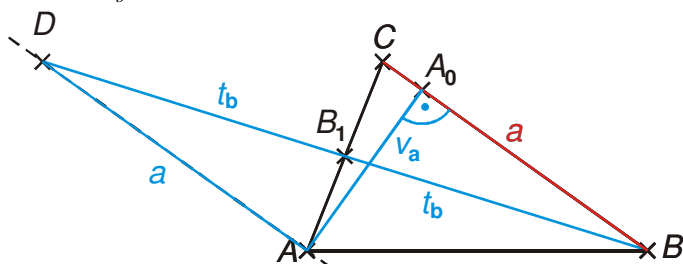
Př. 6: Je dána úsečka BC , $|BC| = 6 \text{ cm}$. Sestroj všechny trojúhelníky ABC , pro které platí $v_a = 4 \text{ cm}$, $t_b = 2,7 \text{ cm}$.

Náčrtek:



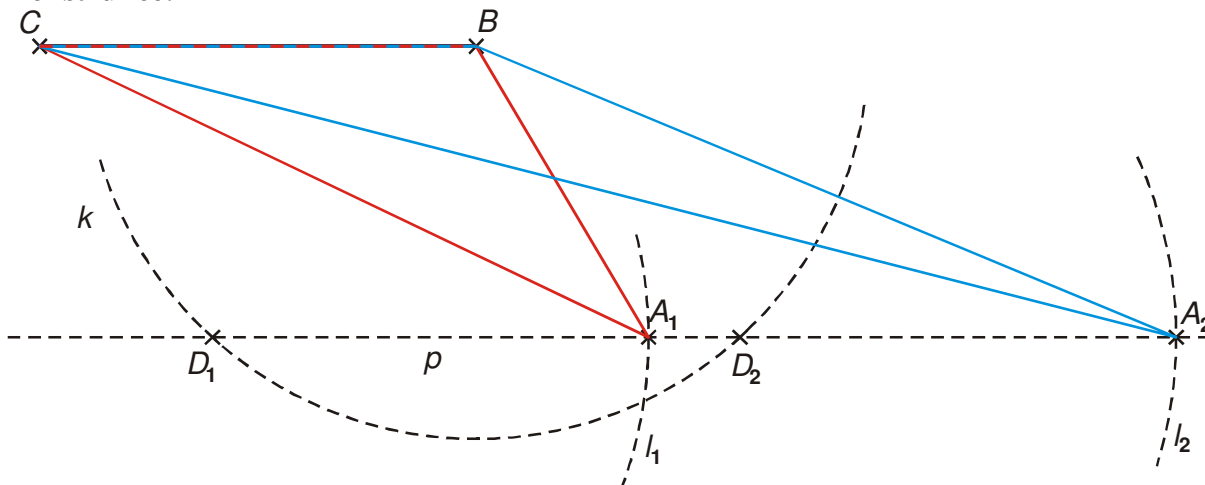
Úloha je polohová.

Řešení: Doplňme obrázek na rovnoběžník $ABDC$, abychom využili velikosti výšky v_a a těžnice t_b .



Body AD leží na přímce rovnoběžné s přímkou BC , která je od ní vzdálená o $v_a = 4 \text{ cm}$. Bod D je od bodu B vzdálen o $2t_b = 9 \text{ cm}$.

Konstrukce:



Zápis konstrukce:

1. $BC; |BC| = 6 \text{ cm}$
2. $p; p \parallel BC, |pBC| = v_a = 4 \text{ cm}$
3. $k; k(B; 2t_b = 5,4 \text{ cm})$
4. $D_1, D_2; \{D_1, D_2\} = k \cap p$
5. $l_1; l_1(D_1; a = 6 \text{ cm})$
6. $A_1; A_1 = l_1 \cap D_1D_2$
7. $l_2; l_2(D_2; a = 6 \text{ cm})$
8. $A_2; A_2 = l_2 \cap A_1D_2$
9. $\triangle A_1BC, \triangle A_2BC$

Rozbor: Úloha může mít v jedné polorovině nula, jedno nebo dvě řešení v závislosti na počtu průsečíků kružnice k a přímky.

Př. 7: Petáková:
strana 77/cvičení 18 o), u)

Shrnutí: Některé úlohy můžeme vyřešit doplněním na rovnoběžník.